

Kinematika hmotného bodu. RLC obvody.

Jan PRACHAŘ

G FMP RK

1 Derivace a integrály

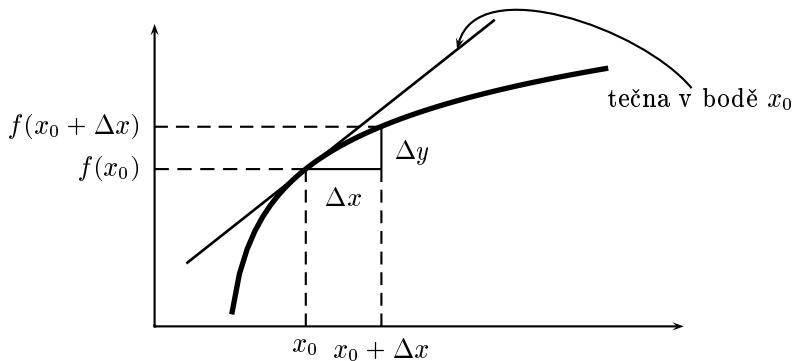
Pro potřeby výkladu si potřebujeme nadefinovat pojmy derivace a integrál nebo je alespoň intuitivně pochopit.

1.1 derivace

Nechť je dána funkce $f(x)$, definovaná v jistém okolí bodu x_0 . Na velice krátkém úseku Δx můžeme považovat funkci $f(x)$ jako lineární, proto můžeme napsat

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Derivaci v bodě x_0 , dostaneme tak, že Δx položíme nekonečně blízko nule, takto si asi intuitivně představujete limitu.



Definice 1.1 (derivace v bodě) Je-li funkce f definována v okolí bodu x_0 , potom derivací funkce f v bodě x_0 je číslo

$$f'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Intuitivně je jasné, že v bodě x_0 derivace neexistuje, pokud v ní funkce f není definována, není spojitá nebo je „ostrá“. Geometrický význam derivace je, že je směrnicí těčny křivky grafu funkce f v bodě x_0 . Dále nám udává, jak rychle funkce f roste. Je-li kladná je funkce rostoucí, je-li záporná, je klesající a je-li rovna nule nabývá funkce f lokálního extrému.

Definice 1.2 (derivace jako funkce) Je-li f funkce, která má derivaci $f'(x)$ v každém bodě x jisté množiny $M \subset D_f$, potom je na množině M definováne funkce, která každému $x \in M$ přiřazuje právě jedno číslo $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Při referátu vám jako příklad ukážu výpočet derivace funkce x^n . Derivace všech elementárních funkcí jsou uvedeny v tabulkách, proto se nemusíme pokaždé zatěžovat jejím výpočtem.

Výpočet derivace se nazývá derivování. Obecně můžeme dostat n -tu derivaci funkce f , pokud ji n krát zderivujeme.

1.2 integrál

1.2.1 neurčitý integrál

Definice 1.3 Nechť f je funkce, jejíž definiční obor obsahuje interval (a, b) . Funkce $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) , právě když platí

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Primitivní funkce je neurčitý integrál funkce f , píšeme

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

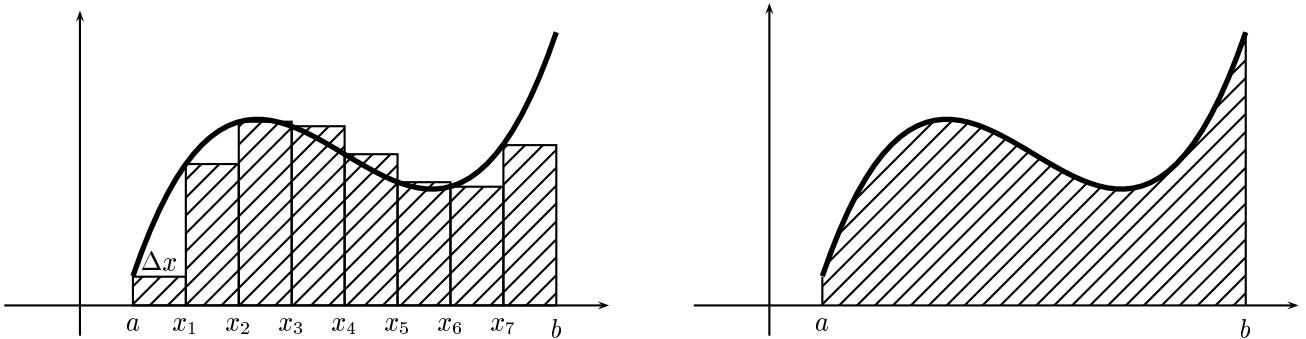
kde c je integrační kontanta (libovolné reálné číslo). Výpočet integrálu se nazývá integrování a je to inverzní operace k derivování. K dané funkci f hladáme takovou funkci, aby její derivace byla rovna f . Primitivní funkce k elementárním funkcím jsou také uvedeny v tabulkách.

1.2.2 určitý integrál

Mějme dánou funkci f spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$. Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme body x_1, \dots, x_{n-1} na n intervalů délky $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. V každém i -tém intervalu vezměme funkční hodnotu $f(x_{i-1})$ a označme $a = x_0$, $b = x_n$, potom utvořme součet

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x,$$

jehož význam je z obrázku jasný. Chceme-li znát obsah plochy pod grafem funkce f necháme n jít k nekonečnu. S rostoucím n se zmenšuje Δx a stále přesněji dostaváme hledaný obsah, limitně obdržíme tento obsah přesně.



Definice 1.4 Určitý integrál funkce f od a do b je číslo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x.$$

Věta 1.1 (Newtonův-Leibnizův vzorec) Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť F je funkce k ní primitivní na tomto intervalu pak platí

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Tento vzorec dává do souvislosti určitý integrál s neurčitým a používá se k výpočtu určitého integrálu.

2 Kinematika hmotného bodu

Kinematika¹ odpovídá na otázku, jak se tělesa pohybují. Těleso budeme nahrazovat hmotným bodem.

Definice 2.1 *Hmotný bod, kterým nahrazujeme těleso, je myšlenkový model, který má stejnou hmotnost jako těleso, ale má nulové rozměry.*

2.1 Vztažná soustava

Definice 2.2 *Inerciální vztažná soustava, je vztažná soustava, která se vůči tělesu pohybuje rovnoměrně přímočaře.*

Definice 2.3 *Neinerciální vztažná soustava, je soustava, která se vůči tělesu pohybuje se zrychlením.*

2.2 Poloha hmotného bodu

Polohu bodu v dané vztažné soustavě popisujeme pomocí polohového vektoru \vec{r} v dané soustavě souřadnic spojené se vztažnou soustavou. V pravoúhlé soustavě souřadnic platí

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

kde x, y, z jsou souřadnice vektoru \vec{r} . V soustavě zobecněných souřadnic q_1, \dots, q_n definujeme metrický tenzor

$$G_{uv} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_v}. \quad (2.1)$$

Velikost elementu $d\vec{r}$ potom dostaneme jako

$$(ds)^2 = \sum_{u,v=1}^n G_{uv} dx^u dx^v. \quad (2.2)$$

Jako příklad uveďme pravoúhlou soustavu souřadnic v rovině, kde $\vec{r} = (q_1, q_2)$. Z definice (2.1) postupně dostáváme $G_{1,1} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial q_1}; \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial q_1}{\partial q_1}; \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \right) = (1, 0) \cdot (1, 0) = 1$, $G_{1,2} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial q_1}; \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial q_1}{\partial q_2}; \frac{\partial q_2}{\partial q_2} \right) = (1, 0) \cdot (0, 1) = 0$, obdobně dostaneme pro $G_{2,1}$ a $G_{2,2}$. Metrický tenzor má tedy tvar

$$G_{uv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ze vztahu (2.2) dostaneme dobře známé $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. V polárních rovinných souřadnicích, kde polohový vektor má tvar $\vec{r} = (q_1 \cos q_2, q_1 \sin q_2)$, obdržíme takovýto metrický tenzor

$$G_{uv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_1^2 \end{pmatrix}.$$

Je vidět, že metrický tenzor závisí na souřadnici, považujeme-li tedy tyto souřadnice za kartézské, nahradíme euklidovskou rovinu rovinou zakřivenou. Ze vztahu (2.2) dostáváme $(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\varphi)^2$.

Přecházíme-li ze vztažné soustavy souřadnic S' do vztažné soustavy souřadnic S , kde soustava S' má v daném časovém okamžiku posunut počátek o vektor \vec{r}_0 , pohybuje se vůči soustavě S rychlostí \vec{v}_0 , se zrychlením \vec{a}_0 , rotuje úhlovou rychlosť $\vec{\omega}$ s úhlovým zrychlením $\vec{\varepsilon}$, transformují se nám vektory \vec{r}' , \vec{v}' , \vec{a}' soustavy S' takto

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'; \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}' + \vec{v}_0; \quad \vec{a} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{a}' + \vec{a}_0.$$

¹z řeckého κινεω

2.3 Trajektorie a dráha hmotného bodu

Definice 2.4 Trajektorie pohybu daného hmotného bodu je množina všech koncových bodů polohového vektoru \vec{r} .

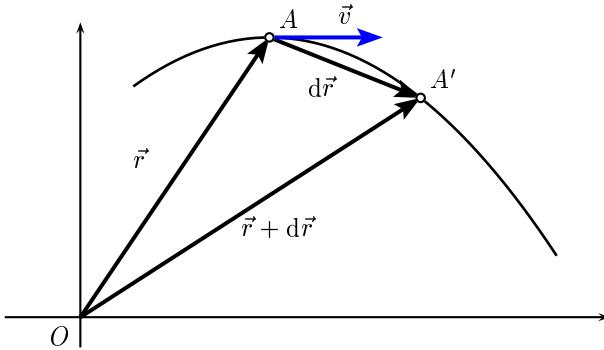
Definice 2.5 Dráha hmotného bodu je skalární veličina, která vyjadřuje délku trajektorie, kterou hmotný bod opíše za určitou dobu

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\mathrm{d}\vec{r}|.$$

Podle tvaru trajektorie rozlišujeme pohyby přímočaré (část přímky) a křivočaré.

2.4 Rychlosť hmotného bodu

Uvažujme pohyb hmotného bodu po trajektorii vyznačené na obrázku. Předpokládejme, že v čase t je hmotný bod v bodě A , v čase $t + dt$ v bodě A' .



Rychlosť hmotného bodu definujeme pomocí elementu $\mathrm{d}\vec{r}$.

Definice 2.6 Vektor okamžité rychlosťi hmotného bodu v čase t je

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}. \quad (2.3)$$

Vektor rychlosť leží tedy v tečně k trajektorii a má směr vektoru $\mathrm{d}\vec{r}$.

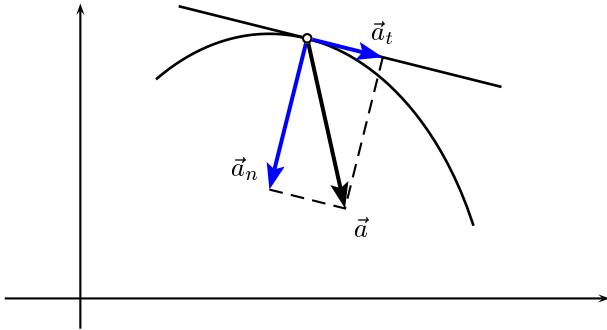
2.5 Zrychlení hmotného bodu

Obdobně jako rychlosť definujeme zrychlení pomocí elementu $\mathrm{d}\vec{v}$, který má význam změny rychlosći.

Definice 2.7 Vektor zrychlení hmotného bodu v čase t definujeme vztahem

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\vec{r}}. \quad (2.4)$$

Ze vztahu (2.3) dostáváme $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$. U křivočarého pohybu je vhodné rozložit vektor okamžitého zrychlení \vec{a} do dvou navzájem kolmých směrů – na tečné zrychlení a normálové zrychlení.



Vztah (2.3) přepíšeme do ekvivalentního tvaru

$$\vec{v} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \cdot \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|},$$

kde jednotkový tečný vektor $(\frac{d\vec{r}}{dt}) / (\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|)$ nazveme $\vec{\tau}$. Z definice 2.5 dráhy $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \dot{s}$. Pro rychlosť máme tedy vztah $\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{\tau}$, který zderivujeme podle času

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\dot{\vec{\tau}} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s} \frac{d\vec{\tau}}{ds} \dot{s} = \dot{s}^2 \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Využijeme vztahu

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R},$$

kde \vec{n} je normálový vektor a R poloměr křivosti. Pro zrychlení dostaváme

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R} \cdot \vec{n} + 0\vec{b}, \quad (2.5)$$

kde člen $\ddot{s}\vec{\tau}$ odpovídá normálovému zrychlení \vec{a}_n , člen $\frac{\dot{s}^2}{R} \cdot \vec{n}$ odpovídá zrychlení tečnému \vec{a}_t a člen $0\vec{b}$ odpovídá zrychlení binormálovému². Dodejme ještě, že velikost tečného zrychlení vyjadřuje změnu velikosti rychlosti a velikost normálového zrychlení vyjedřuje změnu směru rychlosti. Vynásobíme-li vektorově obě strany rovnice (2.5) vektorem \vec{v} , dostaneme

$$\vec{v} \times \vec{a} = \frac{1}{R} \cdot (\vec{v})^3,$$

po upravě dostaváme vztah pro poloměr křivosti

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2}{(\dot{\vec{r}}^2)^3}.$$

2.6 Transformace vektorů \vec{r} , \vec{v} a \vec{a} při záměně soustavy souřadné

V tomto výkladu budeme používat *Einsteinovu sumiční konvenci*. Vyskytne-li se ve výrazu nějaký index právě dvakrát, budeme tím rozumět sumaci přes tento index, aniž bychom vypisovali sumiční znak a sumiční meze. Nebude-li řečeno jinak, budeme všude rozuměti sumiční meze od 1 do 3 (trojrozměrný prostor).

Mějme dánou soustavu souřadnic $x_\alpha(q_\beta)$ (případně zadanou jako $q_\beta(x_\alpha)$). Polohový vektor má tvar $\vec{r} = (x_1; x_2; x_3)$. Definujme kovariantní bázi jako

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha}, \quad (2.6)$$

²binormálový vektor definujeme jako $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$, je tedy kolmý na tečný i normálový.

která má význam směrnicí tečen souřadnice q_α . Dále definujme kontravariantní bázi

$$\vec{e}^\alpha = \text{grad } q_\alpha. \quad (2.7)$$

Ze vztahu (2.1) plyne, že pro metrický tenzor platí

$$G_{uv} = \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v. \quad (2.8)$$

Podobně $G^{uv} = \vec{e}^u \cdot \vec{e}^v$. Dále budeme užívat vztah

$$\vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.9)$$

Mějme vektor definovaný jako $\vec{A} = A_\alpha \vec{e}^\alpha = A^\alpha \vec{e}_\alpha$. Vynásobme obě strany vztahu vektorem \vec{e}_β , dostaneme $\vec{A} \vec{e}_\beta = A_\alpha \vec{e}^\alpha \vec{e}_\beta$. Pro jeho složku A_α potom dostáváme ze vztahu (2.9) $A_\alpha = \vec{A} \vec{e}_\alpha = A^\beta \vec{e}_\beta \vec{e}_\alpha$ a ze vztahu (2.8) obdržíme

$$A_\alpha = G_{\alpha\beta} A^\beta. \quad (2.10)$$

Pro složku vektoru rychlosti můžeme napsat $v^\alpha = \vec{v} \cdot \vec{e}^\alpha$. Ze vztahu (2.7) plyne $v^\alpha = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \text{grad } q_\alpha$, tedy

$$v^\alpha = \dot{q}_\alpha. \quad (2.11)$$

Ze vztahů (2.10) a (2.11) získáme

$$v_\alpha = G_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta. \quad (2.12)$$

Zderivováním vztahu (2.2) podle času obdržíme

$$v^2 = G_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \dot{q}_\alpha, \quad (2.13)$$

což parciálně zderivujeme podle časové derivace souřadnice $\frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_\alpha} = G_{\alpha\beta} \ddot{q}_\beta + G_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta$. A ze vztahu (2.12) dostáváme důležitý vzorec pro složku kovariantního vektoru rychlosti

$$v_\alpha = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{v^2}{2} \right). \quad (2.14)$$

Pro složku vektoru zrychlení platí

$$a_\alpha = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha},$$

Podle vzorce $udv = d(uv) - vdu$ dostáváme

$$a_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha} \right) - \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha}, \quad (2.15)$$

první člen upravíme pomocí vztahů (2.6) a (2.14)

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{e}_\alpha) = \frac{d}{dt} v_\alpha = \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

Druhý člen upravíme na

$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) - \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} v^2 - \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \vec{v},$$

kde $\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\frac{v^2}{2} \right)$. Dosadíme do (2.15) $a_\alpha = \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\frac{v^2}{2} \right)$, celkově tedy dostáváme vztah pro složku konvariantního vektoru rychlosti

$$a_\alpha = \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \right) \left(\frac{v^2}{2} \right), \quad (2.16)$$

³Operátor gradient grad přiřazuje skaláře vektor a definujeme ho jako $\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2}; \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$.

⁴Kroneckerova symbolu δ_{ij} používáme pro matici, pro niž platí $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Je-li báze ortonormální, tzn. že souřadnice jsou na sebe kolmé, nerozlišujeme kovariantní a kontravariantní vektory. Složku vektoru si definujme jako

$$A_\alpha^* = h_\alpha A^\alpha = \frac{1}{h_\alpha} A_\alpha. \quad ^5$$

Protože platí $A_\alpha = G_{\alpha\beta} A^\beta$, dostáváme $h_\alpha A^\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \cdot G_{\alpha\beta} A^\beta$, potom ale musí také platit $h_\alpha A^\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \cdot G_{\alpha\alpha} A^\alpha$, protože $G_{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha \neq \beta$ v ortonormální bázi, z toho obdržíme

$$h_\alpha = \sqrt{G_{\alpha\alpha}}.$$

Pro složku vektoru rychlosti a zrychlení tedy dostáváme

$$a_\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{G_{\alpha\alpha}}} \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \right) \left(\frac{v^2}{2} \right) \quad v_\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{G_{\alpha\alpha}}} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{v^2}{2} \right) \quad (2.17)$$

Jako příklad si ukážeme jak vypadají vektory rychlosti a zrychlení v roviných polárních souřadnicích. Protože se jedná o ortonormální bázi budeme vycházet ze vztahů (2.17). Ramenu r přiřadíme index 1 a úhlu φ index 2. Polohový vektor má tvar $\vec{r} = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, metrický tenzor jsme si už spočítali jako $G_{uv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_1^2 \end{pmatrix}$. Pro rychlosť tedy platí

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Nyní spočítáme jednotlivé složky vektorů \vec{v} a \vec{a} .

$$v_r = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \dot{r} \quad (2.18)$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = r \dot{\varphi} \quad (2.19)$$

$$a_r = \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \quad (2.20)$$

$$a_\varphi = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} r^2 \dot{\varphi} = r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \quad (2.21)$$

2.7 Druhy mechanických pohybů

Zde uvádíme tři nejjednodušší druhy pohybů.

2.7.1 rovnoměrný přímočarý pohyb

Definice 2.8 *Rovnoměrný přímočarý pohyb, je pohyb při kterém se vektor rychlosti \vec{v} hmotného bodu s časem nemění*

$$\dot{\vec{v}} = \vec{0}.$$

Pro vektory polohy, rychlosti, zrychlení a pro dráhu platí

$$\vec{a} = \vec{0}, \quad \vec{v} = \text{const.}, \quad \vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}_0, \quad s = vt + s_0.$$

2.7.2 rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

Definice 2.9 *Rovnoměrně zrychlený pohyb, je pohyb při kterém se vektor tečného zrychlení \vec{a}_t hmotného bodu s časem nemění*

$$\dot{\vec{a}}_t = \vec{0},$$

vektor normálového zrychlení je nulový

$$\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Pro vektory polohy, rychlosti, zrychlení a pro dráhu platí

$$\vec{a} = \text{const.}, \quad \vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0 \quad \vec{r} = \frac{1}{2} \vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0, \quad s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0.$$

⁵v tomto vztahu nesumujeme přes α

2.7.3 rovnoměrný pohyb po kružnici

Definice 2.10 Rovnoměrný pohyb po kružnici, je pohyb při kterém se vektor normálového zrychlení \vec{a}_n hmotného bodu s časem nemění

$$\vec{a}_n = \vec{0},$$

vektor tečného zrychlení je nulový

$$\vec{a}_t = \vec{0}.$$

Pro vektor zrychlení z (2.5) dostáváme

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{n}.$$

Pro popis pohybu po kružnici použijeme polární souřadnice, počátek soustavy bude ve středu kružnice, kterou opisuje polohový vektor. Rychlosť má směrny tečny kružnice, je tedy kolmá na polohový vektor. Rychlosť hmotného bodu je rovna složce ve směru souřadnice φ , pro její velikost dostáváme ze vztahu (2.19)

$$v = r\dot{\varphi},$$

kde $\dot{\varphi}$ označme úhlovou rychlosť ω . Protože je vektor zrychlení rovnoběžný s polohovým vektorem, je velikost zrychlení rovna složce ve směru souřadnice r , tedy ze vztahu (2.20) obdržíme

$$a = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -R\omega^2, \quad (2.22)$$

protože jsme si definovali $\ddot{r} = 0$. Mezi vektory rychlosti a úhlové rychlosti platí

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Zrychlení jsme si definovali jako konstantní, ze vztahu (2.22) tedy plyne, že je konstantní i ω . Protože $\omega = \dot{\varphi}$ pro úhel opsaný polohovým vektorem platí

$$\varphi = \omega t + \varphi_0.$$

Z toho plyne, že rovnoměrný pohyb po kružnici je pohyb periodický.

Definice 2.11 Oběžná doba T je čas, za který polohový vektor \vec{r} opíše úhel $\varphi = 2\pi$

Definice 2.12 Frekvenci definujeme jako

$$f = \frac{1}{T}$$

Z toho důvodu můžeme také pro úhlovou rychlosť napsat

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

3 RLC obvody

Jako RLC obvody označujeme obvody, které mají odpor, kapacitu (kondenzátor) a indukčnost (cívku).

3.1 Indukčnost

Elektrický proud, který teče závity cívky, vytváří vlastní magnetické pole s magnetickou indukcí B . Závity cívky potom prochází magnetický indukční tok $\Phi = BS$. Jestliže je cívka v prostředí s konstantní permeabilitou, je tento indukční tok přímo úměrný proudu v cívce

$$\Phi = LI.$$

Konstanta úměrnosti L závisí na vlastnostech cívky a nazývá se indukčnost cívky. Na cívce se indukuje napětí

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

3.2 RLC obvod

Mějme obvod, v němž jsou sériově zapojeny rezistor o odporu R , cívka o indukčnosti L a kondenzátor s kapacitou C . Pro rezistor platí $U = RI$, pro cívku platí $U = -L\frac{dI}{dt}$ a na kondenzátoru platí vztah $I = C\frac{dU}{dt}$. Pro obvod dostáváme rovnici

$$U = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int I dt,$$

kterou zderivujeme podle času a dostaneme

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I - \dot{U} = 0. \quad (3.1)$$

Je-li $R = 0$ a $U = 0$, odpovídá rovnice rovnici harmonických kmitů $m\ddot{x} + kx = 0$, dostáváme řešení

$$i = I_m \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right),$$

přičemž I_m závisí na počátečních parametrech, tj. na jaké napětí byl nabít kondenzátor, úhlová frekvence je rovna

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Pro okamžité napětí platí vztah

$$u = \sqrt{\frac{L}{C}}I_m \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) = U_m \cos\omega_0 t,$$

obvodem tedy prochází proud, který je za napětím opožděn, fázový posun je $-\frac{\pi}{2}$. Elektromagnetické kmitání můžeme srovnat s mechanickým kmitáním, odpovídají si tyto veličiny: $L \sim m$, $\frac{1}{C} \sim k$, dále okamžitý náboj na kondenzátoru $q \sim y$, $i \sim v$, $E_p = \frac{1}{2}ky \sim E_e = \frac{1}{2}\frac{q}{C}$, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 \sim E_m = \frac{1}{2}Li^2$, $F = ky \sim \frac{q}{C} = u$. Elektromagnetické kmitání spočívá ve vzájemné přeměně magnetické energie cívky a elektrické energie kondenzátoru. Je-li odpor rezistoru nenulový je kmitání tlumené.

Nyní uvažujme, že k obvodu připojíme zdroj střídavého napětí $U = U_m \sin \omega t$, potom řešení rovnice (3.1) odpovídá nucenému kmitání. Obvodem prochází střídavý proud $I_m \sin(\omega t + \varphi_0)$. Rezonance nastává je-li $\omega = \omega_0$, proud je potom největší. Rozeberme nyní obvody různé střídavého proudu.

3.3 Obvod střídavého proudu s odporem

Zavedeme si veličinu

$$Z = \frac{U_m}{I_m},$$

kterou obecně nazýváme impedance, v obvodu s odporem jí říkáme resistance X_R . Obvodem teče střídavý proud $i = I_m \sin \omega t$, pro okamžité napětí platí

$$u = RI_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t,$$

pro rezistanci tedy platí

$$X_R = R.$$

Fázový rozdíl střídavého napětí a proudu je nulový.

3.4 Obvod střídavého proudu s indukčností

Pro okamžitou hodnotu napětí platí

$$u = L\frac{di}{dt} = \omega L \cos \omega t = U_m \cos \omega t.$$

Pro induktanci platí

$$X_L = \omega L.$$

Indukčnost L cívky v obvodu střídavého proudu způsobuje fázový posun napětí před proudem o úhel $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3.5 Obvod střídavého proudu s kapacitou

Protože $I = C \frac{dU}{dt}$, pro okamžitou hodnotu napětí platí

$$u = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} I_m \int \sin \omega t dt = \frac{1}{\omega C} - \cos \omega t = -U_m \cos \omega t.$$

Pro kapacitanci platí

$$X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Kapacita C kondenzátoru v obvodu střídavého proudu způsobuje fázový posun napětí za proudem o úhel $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

3.6 Výkon střídavého proudu

Pro okamžitý výkon střídavého proudu platí

$$p = \frac{udQ}{dt} = ui.$$

Je-li fázový posun napětí za proudem φ , dostáváme postupně pro výkon $p = ZI_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot I_m \sin \omega t = ZI_m^2 \sin \omega t (\sin \omega t \cdot \cos \varphi + \cos \omega t \cdot \sin \varphi) = ZI_m^2 (\cos \varphi \cdot \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t)$. Periodu p označme T , potom pro střední hodnotu výkonu platí

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p dt = \frac{ZI_m^2}{T} \cdot \frac{\cos \varphi}{\omega} \cdot \left[\frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right]_0^T + \frac{ZI_m^2}{T} \cdot \frac{\sin \varphi}{4\omega} \cdot [-\cos 2\omega t]_0^T = \frac{ZI_m^2 \cdot \cos \varphi}{2}.$$

Střední výkon střídavého obvodu s rezistancí R je $\frac{1}{2}RI_m^2$.

Definice 3.1 Efektivní hodnoty střídavého napětí U a proudu I nazveme hodnoty U a I proudu stejnosměrného, který má v obvodu s odporem stejný výkon jako proud střídavý

$$RI^2 = \frac{1}{2}I_m^2R, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Pro střední výkon potom platí

$$\bar{P} = UI \cos \varphi.$$

3.7 Složený obvod střídavého proudu

Nejprve mějme rezistor, cívku a kondenzátor zapojeny sériově. Z předchozích vztahů dostáváme pro napětí

$$u = RI_m \sin \omega t + \omega LI_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = RI_m \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \cos \omega t.$$

Abychom zjistili amplitudu napětí, zderivujeme jej podle času apoložíme rovno nule

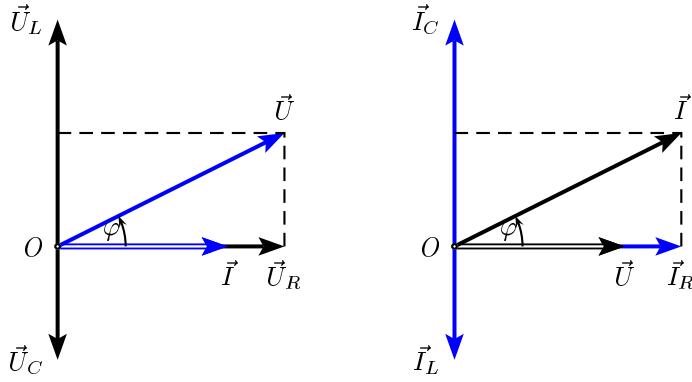
$$\begin{aligned} R\omega I_m \cos \omega t &= \omega \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \sin \omega t, \\ \operatorname{tg} \omega t &= \frac{R}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}, \\ t &= \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{R}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}. \end{aligned}$$

Nyní dosadíme zpět do vztahu pro napětí. Protože $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$ a $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$ obdržíme

$$U_m = RI_m \frac{\frac{R}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}} + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}}.$$

Pro impedanci obvodu dostáváme

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$



Obrázek 3.1: Fázorový diagram střídavý obvod s R, L a C zapojeny sériově a paralelně

Pro fázový rozdíl napětí a proudu v obvodu najdeme z fázorového diagramu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Nyní uvažujme obvod, kde jsou rezistor, čívka a kondenzátor zapojeny paralelně. Pro obvod platí rovnice, která je analogická s (3.1)

$$\dot{I} = C\ddot{U} + \frac{1}{R}\dot{U} + \frac{1}{L}U.$$

Je-li k obvodu připojen zdroj střídavého napětí $U = U_m \sin \omega t$, pro okamžitý proud dostáváme

$$i = \frac{1}{R}U_m \sin \omega t + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)U_m \cos \omega t,$$

tedy pro impedanci obvodu platí

$$Z = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

Pro fázový rozdíl napětí a proudu v obvodu najdeme opět z fázorového diagramu, který je na obrázku 3.1

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{R}.$$