

# Řešené příklady z aplikované matematiky 2

( komplexní čísla, totální diferenciál,  
skalární a vektorové pole, diferenciální rovnice )

Vypracoval: [David Michálek](#)

## Komplexní čísla

### Příklad 1

Z výrazu  $z = \frac{2-4j}{1+j} \cdot (3-2j) + (1+2j) \cdot j^7$  vypočtete  $|z|$ :

$$\begin{aligned} z &= \frac{2-4j}{1+j} \cdot (3-2j) + (1+2j) \cdot j^7 = \frac{(2-4j) \cdot (3-2j)}{1+j} + (1+2j) \cdot (-j) = \frac{6-4j-12j+8j^2}{1+j} + (-j-2j^2) = \\ &= \frac{-2-16j}{1+j} + (2-j) = \frac{-2-16j}{1+j} \cdot \frac{1-j}{1-j} + (2-j) = \frac{(-2-16j) \cdot (1-j)}{(1+j) \cdot (1-j)} + (2-j) = \\ &= \frac{-2+2j-16j+16j^2}{1-j^2} + (2-j) = \frac{-18-14j}{1-(-1)} + (2-j) = \frac{-18-14j}{2} + (2-j) = \\ &= \frac{-18}{2} - \frac{14j}{2} + 2 - j = -9 - 7j + 2 - j = -7 - 8j \end{aligned}$$

$$|z| = \sqrt{(-7)^2 + (-8)^2} = \sqrt{49 + 64} = \sqrt{113}$$

### Příklad 2

Převeďte komplexní číslo  $d = -2\sqrt{3} + 2j$  na goniometrický tvar:

$$|d| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{|d|} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 150^\circ = 210^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|d|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ = 150^\circ$$

$$d = |d| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = 4 \cdot (\cos 150^\circ + j \cdot \sin 150^\circ)$$

### Příklad 3

Určete  $c^8$  z čísla  $c = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$ :

$$|c| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1 \quad \cos \varphi = \frac{a}{|c|} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^\circ = 240^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|c|} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 300^\circ = 240^\circ \quad c = |c| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = 1 \cdot (\cos 240^\circ + j \cdot \sin 240^\circ)$$

$$c^n = |c|^n \cdot (\cos n \cdot \varphi + j \cdot \sin n \cdot \varphi) \Rightarrow c^8 = 1^8 \cdot [\cos(8 \cdot 240^\circ) + j \cdot \sin(8 \cdot 240^\circ)] =$$

$$= 1 \cdot (\cos 1920^\circ + j \cdot \sin 1920^\circ) = 1 \cdot (\cos 120^\circ + j \cdot \sin 120^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

**Příklad 4**

Je dáno komplexní číslo  $z = \frac{5-3j}{8+2j}$ . Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte  $z^{26}$ .

$$z = \frac{5-3j}{8+2j} = \frac{5-3j}{8+2j} \cdot \frac{8-2j}{8-2j} = \frac{40-10j-24j+6j^2}{64-4j^2} = \frac{34-34j}{68} = \frac{34}{68} - \frac{34}{68}j = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = 315^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 225^\circ = 315^\circ \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos 315^\circ + j \cdot \sin 315^\circ)$$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \quad z^{26} = |z|^{26} \cdot [\cos(26 \cdot 315^\circ) + j \cdot \sin(26 \cdot 315^\circ)] =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{26} \cdot (\cos 8190^\circ + j \cdot \sin 8190^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{26} \cdot (\cos 270^\circ + j \cdot \sin 270^\circ)$$

**Příklad 5**

Komplexní číslo  $z = \frac{15-5j}{1+2j} - \frac{1-3j}{i} + 3j - 1$  vyjádřete v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte  $z^6$ .

$$z = \frac{15-5j}{1+2j} - \frac{1-3j}{j} + 3j - 1 = \frac{(15-5j) \cdot (1-2j)}{(1+2j) \cdot (1-2j)} - \frac{(1-3j) \cdot (-j)}{j \cdot (-j)} + 3j - 1 =$$

$$= \frac{15-30j-5j+10j^2}{1-4j^2} - \frac{-j+3j^2}{-j^2} + 3j - 1 = \frac{5-35j}{1+4} - \frac{-3-j}{1} + 3j - 1 =$$

$$= 1-7j - (-3-j) + 3j - 1 = 1-7j+3+j+3j-1 = 3-3j$$

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \quad \cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{3}{\sqrt{18}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = 315^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = -\frac{3}{\sqrt{18}} \Rightarrow \varphi = 225^\circ = 315^\circ \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \sqrt{18} \cdot (\cos 315^\circ + j \cdot \sin 315^\circ)$$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \quad z^6 = (\sqrt{18})^6 \cdot [\cos(6 \cdot 315^\circ) + j \cdot \sin(6 \cdot 315^\circ)] =$$

$$= 5832 \cdot (\cos 1890^\circ + j \cdot \sin 1890^\circ) = 5832 \cdot (\cos 90^\circ + j \cdot \sin 90^\circ) = 0 + 5832j$$

**Příklad 6**

Je dáno komplexní číslo  $z = \frac{1-3j}{2+j} + \frac{1+3j}{2-j} + \frac{2}{5j}$ . Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte  $z^8$ .

$$z = \frac{1-3j}{2+j} + \frac{1+3j}{2-j} + \frac{2}{5j} = \frac{(1-3j) \cdot (2-j)}{(2+j) \cdot (2-j)} + \frac{(1+3j) \cdot (2+j)}{(2-j) \cdot (2+j)} + \frac{2 \cdot (-5j)}{5j \cdot (-5j)} =$$

$$= \frac{2-j-6j+3j^2}{4-j^2} + \frac{2+j+6j+3j^2}{4-j^2} + \frac{-10j}{-25j^2} = \frac{2-j-6j+3j^2+2+j+6j+3j^2}{4-j^2} + \frac{-10j}{-25j^2} =$$

$$= \frac{-2}{4-(-1)} - \frac{10j}{25} = -\frac{2}{5} - \frac{2}{5}j \quad |z| = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{8}{25}} = \frac{\sqrt{8}}{5}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{8}}{5}} = -\frac{10}{5 \cdot \sqrt{8}} = -\frac{2}{\sqrt{8}} \Rightarrow \varphi = 135^\circ = 225^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{8}}{5}} = -\frac{10}{5 \cdot \sqrt{8}} = -\frac{2}{\sqrt{8}} \Rightarrow \varphi = 315^\circ = 225^\circ$$

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \frac{\sqrt{8}}{5} \cdot (\cos 225^\circ + j \cdot \sin 225^\circ) \quad z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)]$$

$$z^8 = \left(-\frac{2}{\sqrt{8}}\right)^8 \cdot [\cos(8 \cdot 225^\circ) + j \cdot \sin(8 \cdot 225^\circ)] = \frac{1}{16} \cdot (\cos 0^\circ + j \cdot \sin 0^\circ) = \frac{1}{16} + 0j$$

### Příklad 7

Komplexní číslo  $z = \frac{3-2j}{5+j} \cdot \frac{5-j}{5-j}$  vyjádřete v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část komplexního čísla  $z^{16}$ .

$$z = \frac{3-2j}{5+j} \cdot \frac{5-j}{5-j} = \frac{(3-2j) \cdot (5-j)}{(5+j) \cdot (5-j)} = \frac{15-3j-10j+2j^2}{25-j^2} = \frac{13-13j}{25-(-1)} = \frac{13-13j}{26} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = 315^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 315^\circ = 225^\circ \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos 315^\circ + j \cdot \sin 315^\circ)$$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \quad z^{16} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{16} \cdot [\cos(16 \cdot 315^\circ) + j \cdot \sin(16 \cdot 315^\circ)] =$$

$$= \frac{1}{256} \cdot (\cos 5040^\circ + j \cdot \sin 5040^\circ) = \frac{1}{256} \cdot (\cos 0^\circ + j \cdot \sin 0^\circ) = \frac{1}{256} + 0j$$

### Příklad 8

Je dáno komplexní číslo  $z = \frac{(1-j)^3 - 1}{(1+j)^3 + 1} + \frac{7}{5j}$ . Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo

v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část komplexního čísla  $z^8$ .

$$z = \frac{(1-j)^3 - 1}{(1+j)^3 + 1} + \frac{7}{5j} = \frac{1-3j+3j^2-j^3-1}{1+3j+3j^2+j^3+1} + \frac{7}{5j} \cdot \left(\frac{-5j}{-5j}\right) = \frac{-3-2j}{-1+2j} + \frac{-35j}{-25j^2} =$$

$$= \left(\frac{-3-2j}{-1+2j}\right) \cdot \left(\frac{-1-2j}{-1-2j}\right) - \frac{7}{5}j = \frac{3+6j+2j+4j^2}{1-4j^2} - \frac{7}{5}j = \frac{-1+8j}{5} - \frac{7}{5}j =$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}j - \frac{7}{5}j = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}j \quad |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{5}} = -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 135^\circ = 225^\circ \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = 135^\circ$$

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot (\cos 135^\circ + j \cdot \sin 135^\circ) \quad z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)]$$

$$z^8 = \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^8 \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)] = \frac{2^4}{5^8} \cdot [\cos(8 \cdot 135^\circ) + j \cdot \sin(8 \cdot 135^\circ)] = \frac{2^4}{5^8} \cdot [\cos 1080^\circ + j \cdot \sin 1080^\circ] =$$

$$= \frac{2^4}{5^8} \cdot (\cos 0^\circ + j \cdot \sin 0^\circ) = \frac{2^4}{5^8} + 0j$$

**Příklad 9**

Je dáno komplexní číslo  $z = \frac{3+i}{1+i} - \frac{1-2i}{i} + 4i$ . Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla  $z^4$ .

$$z = \frac{3+i}{1+i} - \frac{1-2i}{i} + 4i = \frac{(3+i) \cdot (1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)} - \frac{(1-2i) \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} + 4i = \frac{3-3i+i-i^2}{1-i^2} - \frac{2i^2-i}{-i^2} + 4i =$$

$$= \frac{4-2i}{2} - (-2-i) + 4i = 2-i+2+5i = 4+4i \quad z = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{4}{\sqrt{16 \cdot 2}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = 315^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{4}{\sqrt{16 \cdot 2}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = 135^\circ$$

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \sqrt{32} \cdot (\cos 45^\circ + j \cdot \sin 45^\circ)$$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \quad z^4 = (\sqrt{32})^4 \cdot [\cos(4 \cdot 45^\circ) + j \cdot \sin(4 \cdot 45^\circ)] =$$

$$= 1024 \cdot [\cos 180^\circ + j \cdot \sin 180^\circ] = -1024 + 0j$$

**Příklad 10**

Komplexní číslo  $z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} + 2$  vyjádřete v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla  $z^6$ .

$$z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} + 2 = \frac{(1+i) \cdot (1+i)}{(1-i) \cdot (1+i)} - \frac{(1-i) \cdot (1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)} + 2 = \frac{1+i+i+i^2}{1-i^2} - \frac{1-i-i+i^2}{1-i^2} + 2 =$$

$$= \frac{2i}{2} - \frac{-2i}{2} + 2 = i - (-i) + 2 = 2 + 2i \quad z = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = 315^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = 135^\circ$$

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \sqrt{8} \cdot (\cos 45^\circ + j \cdot \sin 45^\circ)$$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \quad z^6 = (\sqrt{8})^6 \cdot [\cos(6 \cdot 45^\circ) + j \cdot \sin(6 \cdot 45^\circ)] =$$

$$= 512 \cdot [\cos 270^\circ + j \cdot \sin 270^\circ] = 0 - 512j$$

### Příklad 11

Je dáno komplexní číslo  $z = \frac{5-2i}{7+3i} \cdot \frac{7-3i}{7-3i}$ . Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla  $z^{24}$ .

$$z = \frac{5-2i}{7+3i} \cdot \frac{7-3i}{7-3i} = \frac{(5-2i) \cdot (7-3i)}{(7+3i) \cdot (7-3i)} = \frac{35-15i-14i+6i^2}{49-9i^2} = \frac{29-29i}{49+9} = \frac{29-29i}{58} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \varphi = 45^\circ = 315^\circ \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \varphi = 225^\circ = 315^\circ$$

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos 315^\circ + j \cdot \sin 315^\circ) \quad z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)]$$

$$z^{24} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{24} \cdot [\cos(24 \cdot 315^\circ) + j \cdot \sin(24 \cdot 315^\circ)] = \frac{2^{12}}{2^{24}} \cdot (\cos 7560^\circ + j \cdot \sin 7560^\circ) = \frac{1}{2^{12}} \cdot (\cos 0^\circ + j \cdot \sin 0^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2^{12}} + 0j$$

### Příklad 12

Komplexní číslo  $z = \frac{5}{1+2i} + 1$  vyjádřete v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla  $z^8$ .

$$z = \frac{5}{1+2i} + 1 = \frac{5 \cdot (1-2i)}{(1+2i) \cdot (1-2i)} + 1 = \frac{5-10i}{1-4i^2} + 1 = \frac{5-10i}{1+4} + 1 = \frac{5-10i}{5} + 1 = 1 - 2i + 1 = 2 + 2i$$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \quad \cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{8}} \quad \varphi = 45^\circ = 315^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{8}} \quad \varphi = 45^\circ = 135^\circ \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \sqrt{8} \cdot (\cos 45^\circ + j \cdot \sin 45^\circ)$$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \quad z^8 = (\sqrt{8})^8 \cdot [\cos(8 \cdot 45^\circ) + j \cdot \sin(8 \cdot 45^\circ)] =$$

$$= 4096 \cdot (\cos 360^\circ + j \cdot \sin 360^\circ) = 4096 \cdot (\cos 0^\circ + j \cdot \sin 0^\circ) = 4096 + 0j$$

### Příklad 13

Komplexní číslo  $\frac{i^{10} - 1}{i^5 + 1}$  vyjádřete v goniometrickém tvaru:

$$\frac{i^{10} - 1}{i^5 + 1} = \frac{-1 - 1}{i + 1} = \frac{-2 \cdot (1 - i)}{(1 + i) \cdot (1 - i)} = \frac{-2 + 2i}{1 - i^2} = \frac{-2 + 2i}{1 - (-1)} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \quad \cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 135^\circ = 225^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = 135^\circ \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \sqrt{2} \cdot (\cos 135^\circ + j \cdot \sin 135^\circ)$$

### Příklad 14

Je dáno komplexní číslo  $z = \frac{5 - 4i}{9 + i} \cdot \frac{9 - i}{9 - i}$ . Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla  $z^{28}$ .

$$z = \frac{5 - 4i}{9 + i} \cdot \frac{9 - i}{9 - i} = \frac{(5 - 4i) \cdot (9 - i)}{(9 + i) \cdot (9 - i)} = \frac{45 - 5i - 36i + 4i^2}{81 - i^2} = \frac{41 - 41i}{81 + 1} = \frac{41 - 41i}{82} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = 315^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 315^\circ = 225^\circ \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos 315^\circ + j \cdot \sin 315^\circ)$$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \quad z^{28} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{28} \cdot [\cos(28 \cdot 315^\circ) + j \cdot \sin(28 \cdot 315^\circ)] =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{28} \cdot (\cos 8820^\circ + j \cdot \sin 8820^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{28} \cdot (\cos 180^\circ + j \cdot \sin 180^\circ) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{28} + 0j$$

### Příklad 15

Je dáno komplexní číslo  $z = \frac{3 - 2i}{5 + i}$ . Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla  $z^{30}$ .

$$z = \frac{3-2i}{5+i} \cdot \frac{5-i}{5-i} = \frac{15-3i-10i+2i^2}{25-i^2} = \frac{13-13i}{26} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = 315^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 315^\circ = 225^\circ \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos 315^\circ + j \cdot \sin 315^\circ)$$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \quad z^{30} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{30} \cdot [\cos(30 \cdot 315^\circ) + j \cdot \sin(30 \cdot 315^\circ)] =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{30} \cdot (\cos 9450^\circ + j \cdot \sin 9450^\circ) = \frac{2^{15}}{2^{30}} \cdot (\cos 90^\circ + j \cdot \sin 90^\circ) = 0 + 2^{-15}j$$

### Příklad 16

Komplexní číslo  $z = 2 + \frac{1-i}{1+i} - \frac{1+i}{1-i}$  vyjádřete v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla  $z^6$ .

$$z = 2 + \frac{1-i}{1+i} - \frac{1+i}{1-i} = 2 + \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} - \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = 2 + \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} - \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} =$$

$$= 2 + \frac{1-2i+i^2 - (1+2i+i^2)}{1-i^2} = 2 + \frac{1-2i+i^2 - 1-2i-i^2}{1+1} = 2 + \frac{0-4i}{2} = 2 - 2i$$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \quad \cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ = 315^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-2}{\sqrt{8}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 315^\circ = 225^\circ \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \sqrt{8} \cdot (\cos 315^\circ + j \cdot \sin 315^\circ)$$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \quad z^6 = (\sqrt{8})^6 \cdot [\cos(6 \cdot 315^\circ) + j \cdot \sin(6 \cdot 315^\circ)] =$$

$$= (\sqrt{8})^6 \cdot (\cos 1890^\circ + j \cdot \sin 1890^\circ) = 512 \cdot (\cos 90^\circ + j \cdot \sin 90^\circ) = 0 + 512j$$

### Příklad 17

Určete  $x$  z výrazu  $x^6 + 729j = 0$ :

$$x^6 + 729j = 0 \quad \text{jde o binomickou rovnici} \quad z^n = a + bj$$

$$x^6 = -729j \quad x = \sqrt[6]{-729j} \quad z = 0 - 729j$$

$$|z| = \sqrt{(-729)^2} = 729 \quad \cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{0}{729} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ = 270^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = -\frac{729}{729} = -1 \Rightarrow \varphi = 270^\circ \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = 729 \cdot (\cos 270^\circ + j \cdot \sin 270^\circ)$$



$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left\{ |z| \cdot \left[ \cos(\varphi + k \cdot 2\pi) + j \cdot \sin(\varphi + k \cdot 2\pi) \right] \right\}^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) \right]$$

$$x = \sqrt[6]{z} = 729^{\frac{1}{6}} \cdot \left[ \cos\left(\frac{270^\circ + k \cdot 2 \cdot 180^\circ}{6}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{270^\circ + k \cdot 2 \cdot 180^\circ}{6}\right) \right] =$$

$$= 3 \cdot \left[ \cos\left(\frac{270^\circ + k \cdot 2 \cdot 180^\circ}{6}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{270^\circ + k \cdot 2 \cdot 180^\circ}{6}\right) \right]$$

**Příklad 18**

V množině komplexních čísel řešte rovnici  $x^3 - 1$ :

$x^3 - 1$  jde o binomickou rovnici  $z^n = a + bj$

$$x^3 = 1 \quad x = \sqrt[3]{1} \quad z = 1 + 0j \quad |z| = \sqrt{1^2} = 1 \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = 1 \cdot (\cos 0^\circ + j \cdot \sin 0^\circ)$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \varphi = 0^\circ \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) \right]$$

$$x = \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} \cdot \left[ \cos\left(\frac{0 + k \cdot 2\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{0 + k \cdot 2\pi}{3}\right) \right] = 1 \cdot \left[ \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \right], \text{ kde } k \in \{0, 1, 2\}$$

Odtud:

$$x_0 = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right) = \cos 0 + j \cdot \sin 0 = 1 + 0j$$

$$x_1 = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right) = \cos \frac{2}{3}\pi + j \cdot \sin \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) = \cos \frac{4}{3}\pi + j \cdot \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

**Příklad 19**

V množině komplexních čísel řešte rovnici  $x^5 = j$ :

$$x^5 = j \quad \text{jde o binomickou rovnici } z^n = a + bj \quad |z| = \sqrt{1^2} = 1 \quad \cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \varphi = 90^\circ \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = 1 \cdot (\cos 90^\circ + j \cdot \sin 90^\circ)$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) \right]$$

$$x = \sqrt[5]{z} = z^{\frac{1}{5}} = 1^{\frac{1}{5}} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi}{5}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi}{5}\right) \right] = 1 \cdot \left[ \cos \frac{\pi(1+4k)}{10} + j \cdot \sin \frac{\pi(1+4k)}{10} \right]$$

kde  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Odtud:

$$x_0 = \cos \frac{\pi(1+4k)}{10} + j \cdot \sin \frac{\pi(1+4k)}{10} = \cos \frac{\pi(1+4 \cdot 0)}{10} + j \cdot \sin \frac{\pi(1+4 \cdot 0)}{10} = \cos \frac{\pi}{10} + j \cdot \sin \frac{\pi}{10}$$

$$x_1 = \cos \frac{\pi(1+4k)}{10} + j \cdot \sin \frac{\pi(1+4k)}{10} = \cos \frac{\pi(1+4 \cdot 1)}{10} + j \cdot \sin \frac{\pi(1+4 \cdot 1)}{10} = \cos \frac{\pi}{2} + j \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \mathbf{0 + j}$$

$$x_2 = \cos \frac{\pi(1+4k)}{10} + j \cdot \sin \frac{\pi(1+4k)}{10} = \cos \frac{\pi(1+4 \cdot 2)}{10} + j \cdot \sin \frac{\pi(1+4 \cdot 2)}{10} = \cos \frac{9}{10} \pi + j \cdot \sin \frac{9}{10} \pi$$

$$x_3 = \cos \frac{\pi(1+4k)}{10} + j \cdot \sin \frac{\pi(1+4k)}{10} = \cos \frac{\pi(1+4 \cdot 3)}{10} + j \cdot \sin \frac{\pi(1+4 \cdot 3)}{10} = \cos \frac{13}{10} \pi + j \cdot \sin \frac{13}{10} \pi$$

$$x_4 = \cos \frac{\pi(1+4k)}{10} + j \cdot \sin \frac{\pi(1+4k)}{10} = \cos \frac{\pi(1+4 \cdot 4)}{10} + j \cdot \sin \frac{\pi(1+4 \cdot 4)}{10} = \cos \frac{17}{10} \pi + j \cdot \sin \frac{17}{10} \pi$$

## Totální diferenciál

### Příklad 1

Určete totální diferenciál funkce  $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ :

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2} = 0,5x^2 + 0,5y^2$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy = \frac{\partial(0,5x^2 + 0,5y^2)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial(0,5x^2 + 0,5y^2)}{\partial y} \cdot dy =$$

$$= (2 \cdot 0,5x + 0) dx + (0 + 2 \cdot 0,5y) dy = \mathbf{x \cdot dx + y \cdot dy}$$

### Příklad 2

Určete totální diferenciál funkce  $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ :

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{jde o funkci složenou } (\operatorname{arctg} a)' = \frac{1}{1+a^2} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{0 \cdot x - y \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1 \cdot x - y \cdot 0}{x^2} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{x}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy = \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot dy = \quad / \text{vytkneme } \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (-y \cdot dx + x \cdot dy)$$

**Příklad 3**

Určete totální diferenciál funkce  $z = \sin(x + 3y)$ :

$$z = \sin(x + 3y) \quad \text{jde o funkci složenou} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial [\sin(x + 3y)]}{\partial x} = \cos(x + 3y) \cdot (1 + 0) = \cos(x + 3y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial [\sin(x + 3y)]}{\partial y} = \cos(x + 3y) \cdot (0 + 3) = 3 \cdot \cos(x + 3y)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \cos(x + 3y) \cdot dx + 3 \cdot \cos(x + 3y) \cdot dy$$

**Příklad 4**

Určete totální diferenciál funkce  $z = \frac{x \cdot y}{x - y}$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x \cdot y}{x - y} \quad \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\text{kde } u = x \cdot y; \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x} = x \cdot y = 1 \cdot y = y; \quad v = x - y \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} = 1 - 0 = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x \cdot y}{x - y} = \frac{y \cdot (x - y) - x \cdot y \cdot 1}{(x - y)^2} = \frac{xy - y^2 - xy}{(x - y)^2} = \frac{-y^2}{(x - y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \cdot y}{x - y} \quad \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},$$

$$\text{kde } u = x \cdot y; \quad u' = \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot y = x \cdot 1 = x; \quad v = x - y \quad v' = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 - 1 = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \cdot y}{x - y} = \frac{x \cdot (x - y) - x \cdot y \cdot (-1)}{(x - y)^2} = \frac{x^2 - xy + xy}{(x - y)^2} = \frac{x^2}{(x - y)^2}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{-y^2}{(x - y)^2} \cdot dx + \frac{x^2}{(x - y)^2} \cdot dy$$

**Příklad 5**

Určete totální diferenciál funkce  $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$ :

$$z = \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x \cdot y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\left(-\frac{1}{2}-1\right)} = -\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2 y^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{x}}{2 \sqrt{y^3}}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{dx}{2 \cdot \sqrt{x \cdot y}} - \frac{\sqrt{x}}{2 \sqrt{y^3}} dy$$

### Příklad 6

Určete totální diferenciál funkce  $z = \sqrt{x^3 + y^3}$ :

$$z = \sqrt{x^3 + y^3} = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{2}} \quad \text{jde o funkci slouženou} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (x^3 + y^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 + 0) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x^3 + y^3)^{\frac{1}{2}}} \cdot x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (x^3 + y^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (0 + 3y^2) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x^3 + y^3)^{\frac{1}{2}}} \cdot y^2 = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot dx + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot dy = \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot dx + \frac{y^2}{\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot dy \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2 \cdot dx + y^2 \cdot dy}{\sqrt{x^3 + y^3}}$$

## Skalární a vektorová pole

### Příklad 1

Je dána funkce  $f = x^2yz + xy^2z + xyz^2$ . Určete **div grad**  $f$  v bodě  $\mathbf{P}[1; 1; 1]$ :

$$f = x^2yz + xy^2z + xyz^2 \quad \text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \text{div } \vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\mathbf{A}} = \text{grad } f = (2xyz + y^2z + yz^2; x^2z + 2xyz + xz^2; x^2y + xy^2 + 2xyz)$$

$$\text{div } \vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial (2xyz + y^2z + yz^2)}{\partial x} + \frac{\partial (x^2z + 2xyz + xz^2)}{\partial y} + \frac{\partial (x^2y + xy^2 + 2xyz)}{\partial z} =$$

$$= (2yz + 0 + 0) + (0 + 2xz + 0) + (0 + 0 + 2xy) = 2yz + 2xz + 2xy$$

$$\text{div } \vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{P}[1;1;1]} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 + 2 + 2 = 6$$

## Diferenciální rovnice

### Příklad 1

Řešte diferenciální rovnici  $y' = \frac{x}{y}$  a najděte partikulární řešení pro bod  $y_{(2)} = 1$ :

$$y' = \frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} \quad \text{jde o součin 2 proměnných, řešíme separací proměnných}$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot y \cdot dx \quad y \cdot dy = x \cdot dx \quad \int y \cdot dy = \int x \cdot dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \quad / \cdot 2 \quad y^2 = x^2 + 2c \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2 + 2c} \quad \text{obecné řešení}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 2c} \quad \text{z tohoto výrazu máme najít partikulární řešení pro } y_{(2)} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ a } x = 2$$

$$1 = \sqrt{2^2 + 2c} \quad /^2 \quad 1 = 4 + 2c \quad -3 = 2c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{3}{2}$$

$$y_p = \sqrt{x^2 + 2c} = \sqrt{x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \sqrt{x^2 - 3}$$

### Příklad 2

Řešte diferenciální rovnici  $y' = x \cdot y$ :

$$y' = x \cdot y \quad \text{jde o součin 2 proměnných, řešíme separací proměnných}$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y \quad / : y \cdot dx \quad \frac{dy}{y} = x \cdot dx \quad \int \frac{dy}{y} = \int x \cdot dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c \quad \ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln|c| \quad \ln|y| - \ln|c| = \frac{x^2}{2}$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = \frac{x^2}{2} \quad \frac{y}{c} = e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot c$$

### Příklad 3

Řešte diferenciální rovnici  $y' - 2\sqrt{y} = 0$  pomocí metody separace pro  $y_{(1)} = 0$ :

$$y' - 2\sqrt{y} = 0 \quad y' = 2\sqrt{y} \quad \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \quad / : (\sqrt{y}) \cdot dx$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 2 dx \quad y^{\frac{1}{2}} \cdot dy = 2 dx \quad \int y^{\frac{1}{2}} \cdot dy = \int 2 dx \quad \int y^{\frac{1}{2}} \cdot dy = 2 \int dx$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x + c \quad 2y^{\frac{1}{2}} = 2x + c \quad 2\sqrt{y} = 2x + c \quad / : 2 \quad \sqrt{y} = x + c \quad /^2 \quad y = (x + c)^2 \quad \text{obecné řešení}$$

$$y = (x + c)^2 \quad \text{z tohoto výrazu máme najít partikulární řešení pro } y_{(1)} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ a } x = 1$$

$$0 = (1 + c)^2 \quad \Rightarrow \quad c = -1 \quad y_p = (x + c)^2 = (x - 1)^2$$

**Příklad 4**

Řešte diferenciální rovnici  $y' = \sqrt[3]{y^2}$  pomocí metody separace pro  $y_{(0)} = 1$ :

$$y' = \sqrt[3]{y^2} = y^{\frac{2}{3}} \quad \frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}} \quad / \cdot dx \quad / : y^{\frac{2}{3}} \quad \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = dx \quad y^{-\frac{2}{3}} \cdot dy = dx$$

$$\int y^{-\frac{2}{3}} \cdot dy = \int dx \quad \frac{y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = x + c \quad 3y^{\frac{1}{3}} = x + c \quad / : 3 \quad y^{\frac{1}{3}} = \frac{x+c}{3} \quad / ^3 \quad y = \left( \frac{x+c}{3} \right)^3 \quad \text{obecné řešení}$$

$$y = \left( \frac{x+c}{3} \right)^3 \quad \text{z tohoto výrazu máme najít partikulární řešení pro } y_{(0)} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ a } x = 0$$

$$1 = \left( \frac{0+c}{3} \right)^3 \quad 1 = \left( \frac{c}{3} \right)^3 \quad 1 = \frac{c^3}{27} \quad / \cdot 27 \quad c^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt[3]{27} = 3 \quad y_p = \left( \frac{x+c}{3} \right)^3 = \left( \frac{x+3}{3} \right)^3$$

**Příklad 5**

Řešte diferenciální rovnici  $y' - 3\frac{y}{x} = 0$  pomocí metody separace pro  $y_{(2)} = 4$ :

$$y' - 3\frac{y}{x} = 0 \quad y' = 3\frac{y}{x} \quad \frac{dy}{dx} = 3\frac{y}{x} \quad / \cdot dx \quad / : y \quad \frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{y} dy = 3\frac{1}{x} dx \quad \int \frac{1}{y} dy = \int 3\frac{1}{x} dx \quad \int \frac{1}{y} dy = 3 \int \frac{1}{x} dx$$

$\ln|y| = 3\ln|x| + c$   $c$  je jakákoli konstanta, proto ji můžeme nahradit pro lepší počítání  $\ln|c|$

$$\ln|y| = \ln|x^3| + \ln|c| \quad \ln|y| = \ln|x^3 \cdot c| \quad y = x^3 \cdot c \quad \text{obecné řešení}$$

$y = x^3 \cdot c$  z tohoto výrazu máme najít partikulární řešení pro  $y_{(2)} = 4 \Rightarrow y = 4$  a  $x = 2$

$$4 = 2^3 \cdot c \quad 4 = 8c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2} \quad y_p = \frac{1}{2} x^3$$

**Příklad 6**

Řešte diferenciální rovnici  $x^2 y' - y = 0$  pomocí metody separace:

$$x^2 y' - y = 0 \quad \text{za } y' \text{ dosadíme } \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = y \quad / \cdot dx \quad / : x^2 \quad / : y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2} \quad \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x^2} dx \quad \ln|y| = \frac{x^{-1}}{-1} + c \quad \ln|y| = -\frac{1}{x} + c$$

$$y = e^{-\frac{1}{x} + c} = e^{-\frac{1}{x}} \cdot e^c = e^{-\frac{1}{x}} \cdot c \quad a^{(x+y)} = a^x \cdot a^y$$

**Použitá literatura**

- [1] Bušek, I: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, 2002  
 [2] Tesař, J.: Sběrka úloh z matematiky pro fyziky, PF JČU České Budějovice  
 [3] Kováčik, J, a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, 2004

**O B S A H**

<b>KOMPLEXNÍ ČÍSLA .....</b>	<b>2</b>
Příklad 1 .....	2
Příklad 2 .....	2
Příklad 3 .....	2
Příklad 4 .....	3
Příklad 5 .....	3
Příklad 6 .....	3
Příklad 7 .....	4
Příklad 8 .....	4
Příklad 9 .....	5
Příklad 10 .....	5
Příklad 11 .....	6
Příklad 12 .....	6
Příklad 13 .....	7
Příklad 14 .....	7
Příklad 15 .....	7
Příklad 16 .....	8
Příklad 17 .....	8
Příklad 18 .....	9
Příklad 19 .....	9
<b>TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL .....</b>	<b>10</b>
Příklad 1 .....	10
Příklad 2 .....	10
Příklad 3 .....	11

Příklad 4.....	11
Příklad 5.....	11
Příklad 6.....	12
<b>SKALÁRNÍ A VEKTOROVÁ POLE .....</b>	<b>12</b>
Příklad 1.....	12
<b>DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE .....</b>	<b>13</b>
Příklad 1.....	13
Příklad 2.....	13
Příklad 3.....	13
Příklad 4.....	14
Příklad 5.....	14
Příklad 6.....	14
<b>POUŽITÁ LITERATURA .....</b>	<b>15</b>